OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 18.02.2012 -

CLASA A 11 - A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 10 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1 (***)

a) Fie a un număr real. Arătați că, pentru orice număr natural $n > |a|$, $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \geq 1+a$.

b) Arătaţi că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $b = a/n$. Atunci $1+b>0$ şi, inductiv, $(1+b)^k \geq 1+kb, \forall k \in \mathbb{N}^*$, deci $(1+a/n)^n = (1+b)^n \geq 1+nb = 1+a$ *Observaţii.* 1) Pentru punctajul maxim, este suficient să se observe că este vorba de inegalitatea lui Bernoulli. 2) Pentru un raţionament care funcţionează doar în cazul $a \geq 0$ se vor acorda **2 puncte**	**4 puncte**
b) Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x/n)^n = e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3 puncte**
Deoarece $(1+x/n)^n \geq 1+x$ pentru $n > \|x\|$, deducem concluzia	**3 puncte**

Subiectul 2 (*N. Bourbăcuţ*)

a) Arătaţi că există două matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel ca, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\det(xA+yB) = x^2+y^2.$$

b) Arătaţi că nu există matricele $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ astfel ca, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\det(xA+yB+zC) = x^2+y^2+z^2.$$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Putem alege, de exemplu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	**4 puncte**
b) $xA+yB+zC = \begin{pmatrix} xa_1+yb_1+zc_1 & xa_2+yb_2+zc_2 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$	**2 puncte**
Cum sistemul $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases}$ are o soluţie nebanală (x_0, y_0, z_0), existenţa matricelor ar duce la contradicţia $0 = \det(xA+yB+zC) = x_0^2+y_0^2+z_0^2$	**4 puncte**

Subiectul 3 (*N. Bourbăcuţ*)

a) Justificaţi afirmaţia: „*Pentru orice* $x \in (0, \infty)$, $\sin x < x$".

b) Fie $a \in [0,1]$ şi $(x_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sin \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Arătaţi că şirul este convergent şi determinaţi-i limita.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă $x > 1$, proprietatea este evidentă	**1 punct**
Dacă $x \in (0,1]$, atunci $\sin x/2$ este aria unui triunghi „înscris" într-un sector de cerc având aria $x/2$	**2 puncte**
b) Folosim faptul că un şir monoton şi mărginit este convergent	**1 punct**
Mărginirea rezultă din $-1 \leq \sin t \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$	**1 punct**
Monotonia rezultă inductiv, deoarece $x_1 \in [0,1]$ implică $x_2 = \sin x_1 \in [0,1]$ şi $x_2 \leq x_1$, iar $0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \ldots \leq x_1 \leq 1$ implică $0 \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \leq 1$, de unde $0 \leq x_{n+1} \leq x_n \leq 1$	**3 puncte**
Dacă $(x_n)_n \to l$, atunci $\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)_n \to l$, deci $\sin l = l$, de unde $l = 0$	**2 puncte**

Subiectul 4 (*N. Bourbăcuţ*)

Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice nenulă, cu $\det A = 0$. Demonstraţi că:

$$A + A^* = \operatorname{tr}(A) I_n \text{ dacă şi numai dacă } n = 2.$$

($\operatorname{tr}(A)$ este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei *A*).

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Dacă $n = 2$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $A + A^* = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = (a+d)I_2$	**4 puncte**
Reciproc, dacă $A + A^* = \operatorname{tr}(A) I_n$, atunci $AA^* + (A^*)^2 = \operatorname{tr}(A) A^*$, deci $(A^*)^2 = \operatorname{tr}(A) A^*$ *Observaţie*. Cele două puncte se acordă şi doar pentru afirmaţia $AA^* = (\det A) I_n = 0_n$	**2 puncte**
Apoi $A \neq 0_n$ şi $\det A = 0$, deci $A^* \neq 0_n$, de unde $\operatorname{rang} A = n-1$. Cum $AA^* = 0_n$ şi $\operatorname{rang}(AA^*) \geq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} A^* - n$, deducem $\operatorname{rang} A^* = 1$	**2 puncte**
Astfel $(A^*)^2 = \operatorname{tr}(A^*) A^*$, deci $\operatorname{tr}(A^*) = \operatorname{tr}(A)$. Din ipoteză reiese $\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(A^*) = n \operatorname{tr}(A)$, de unde $n = 2$	**2 puncte**